UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Modelos Avanzados de Computación

Práctica 4

Problemas NP-Completos

Curso 2014-2015

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Práctica 4

Problemas NP-Completos

Un problema B en NP es NP-completo si, para cualquier problema A en NP, se puede rreducir A a B en tiempo polinómico. Dicho de otra forma, un problema $B \in NP$ es NP-completo si $\forall A \in NP, A \leq B$. Que un problema B sea NP-Completo quiere decir que podemos traducir las instancias de cualquier problema $A \in NP$ a instancias de B, de forma que, si pudiésemos resolver B, también podríamos resolver A. Esto es, B es tan general que es capaz de expresar las restricciones y objetivos de cualquier otro problema de NP.

Si se demuestra que cualquier problema NP-completo está en P, entonces P sería igual a NP. De la misma forma, si se demostrase que algún problema NP-completo no se puede resolver en tiempo polinómico, entonces el resto de los problemas NP-completos tampoco se podría resolver en tiempo polinómico: $P \neq NP$.

Demuestre que los siguientes problemas son NP-completos:

1. **Camino más largo** [LONGEST PATH]: Dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo $K \leq |V|$, ¿contiene G un camino simple (que no pase dos veces por el mismo sitio) con K o más arcos?

2. **Coloreado de grafos con 3 colores** [GRAPH 3-COLORING]: Dado un grafo $G = (V, E)$, ¿existe una función $f : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$, tal que $f(u) \neq f(v)$ para todos los arcos $\{u, v\} \in E$?

3. **Recubrimiento de un grafo** [VERTEX COVER]: Dado un grafo G y un entero k, ¿tiene G una cobertura de tamaño k o menor? Un conjunto de vértices $S \subseteq V$ es una cobertura del grafo G si, para toda arista $e \in E$, al menos uno de los extremos de e está en S.

   Dado que encontrar un recubrimiento mínimo de un grafo es equivalente a encontrar un conjunto independiente [INDEPENDENT SET] o un clique de tamaño máximo [CLIQUE], descubrir que cualquiera de estos tres problemas es NP-completo sirve para demostrar que los tres lo son.

4. **Subgrafo común maximal** [SUBGRAPH ISOMORPHISM]: Dados los grafos $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$, y un entero positivo K, ¿existen subconjuntos $E_1' \subseteq E_1$ y $E_2' \subseteq E_2$ tales que $|E_1'| = |E_2'| \geq K$ y tal que los dos subgrafos $G_1' = (V_1, E_1')$ y $G_2' = (V_2, E_2')$ son isomorfos?

5. **Corte máximo** [MAX CUT]: Dado un grafo ponderado G, dos vértices s y t y un entero positivo k, ¿existe un corte en G que separe s de t y tenga al menos peso k?

6. **Empaquetado de conjuntos** [SET PACKING]: Dada una colección C de conjuntos finitos y un entero $K \leq |C|$, ¿existen K conjuntos disjuntos en C?

7. **Partición de conjuntos** [SET COVER]: Dada una familia C de subconjuntos de un conjunto finito S ¿existe un subconjunto de C de tamaño k que cubre S? En otras palabras, ¿existe $C' \subset C$ con $|C'| = k$ tal que $\cup_{C_i \in C'} C_i = S$? S_2).

8. **Partición de conjuntos (bis)** [SET SPLITTING]: Dada una familia C de subconjuntos de un conjunto finito S ¿existe una partición de S en dos partes S_1 y S_2 tales ningún elemento $A \in C$ esté contenido ni en S_1 o ni en S_2 (todo $A \in C$ debe de tener intersección no vacía con S_1 y con S_2). *Pista: Reducir desde 3-SAT.*

9. **Estrella de Steiner en grafos** [STEINER TREE]: Dado un grafo $G = (V, E)$, y un subconjunto $R \subseteq V$, y un entero positivo $K \leq |V| - 1$, ¿existe un subárbol de G que contiene todos los vértices de R y que no contiene más de K arcos?

10. **Matching 3D** [PERFECT 3-MATCHING]: Dados tres conjuntos U, V, W de tamaño n y un conjunto $S \subseteq U \times V \times W$, ¿existe un subconjunto $T \subseteq S$ de tamaño n que incluya cada elemento de $U \cup V \cup W$ exactamente una vez?

    NOTA: El matching bidimensional está en P (p.ej. se puede resolver como un problema de flujo en redes).

11. **Partición en subgrafos hamiltonianos** [HAMILTONIAN SUBGRAPH PARTITION]: Dado un grafo $G = (V, E)$, y un entero positivo $K \leq |V|$, ¿pueden particionarse los vértices de G en $k \leq K$ conjuntos disjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$ de tal forma que para todo $1 \leq i \leq k$, V_i contiene un circuito hamiltoniano?

12. **Partición en caminos de longitud 2** [PATH PARTITION]: Dado un grafo $G = (V, E)$, con $|V| = 3q$ donde q es un entero positivo, ¿existe una partición de V en q conjuntos disjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_q$ de tal forma que para cada $V_i = \{v_{i[1]}, v_{i[2]}, v_{i[3]}\}$, al menos dos de los tres posibles arcos, $\{v_{i[1]}, v_{i[2]}\}, \{v_{i[1]}, v_{i[3]}\}, \{v_{i[2]}, v_{i[3]}\}$ está en E. *Pista: Reducir PERFECT 3-MATCHING...*

13. **Conjunto de vértices de realimentación** [FEEDBACK VERTEX SET]: Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$, y un entero positivo $K \leq |V|$, ¿existe un subconjunto $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq K$ y tal que todo circuito dirigido en G incluya al menos un vértice de V'?

14. **Numeración en grafos** [GRAPH GRUNDY NUMBERING]: Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$, ¿existe una numeración $L : V \to \mathbb{N}$, donde el mismo número puede asignarse a más de un vértice y tal que cada $L(u)$ es igual al mínimo de todos los valores enteros que no están en $\{L(v) : (u, v) \in A\}$.

15. **Conjunto dominante** [DOMINATING SET]: Dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo $K \leq |V|$, ¿existe un subconjunto $V' \subseteq V$ tal que $|V'| \leq K$ y tal que todo vértice $v \in V - V'$ está conectado con al menos un vértice de V'?

16. **Circuito hamiltoniano alternativo** [ANOTHER HAMILTONIAN CYCLE]: Dado un grafo y un circuito hamiltoniano, determinar si el grafo tiene otro circuito hamiltoniano.

17. **Suma de cuadrados mínima** [MINIMUM SUM OF SQUARES]: Dado un conjunto finito A y un tamaño $s(a) > 0$ para todo $a \in A$ y dos enteros positivos K y J, ¿pueden particionarse los elementos de A en K conjuntos disjuntos, $A_1, \ldots, A_k$, de tal forma que $\sum_{i=1}^{K} \left(\sum_{a \in A_i} s(a) \right)^2 \leq J$?

18. **Equivalencia de expresiones regulares sin estrella** [STAR-FREE REGULAR EXPRESSION EQUIVALENCE]: Dadas dos expresiones regulares E_1 y E_2 sobre el alfabeto A que no contienen el operador de clausura $*$, ¿representan estas expresiones regulares lenguajes distintos sobre A?

19. **Red distribuida de telefonía móvil**: Tenemos un grafo no dirigido G=(V,E) en el que los vértices son personas y las aristas nos indican si dos personas están dentro del alcance de las señales que emiten sus móviles. Cuando dos personas están hablando entre sí, sus vecinos no pueden utilizar la misma frecuencia para evitar interferencias en la conversación que está teniendo lugar. Por tanto, un conjunto de conversaciones consiste en un conjuno de aristas $C \subset E$ en el que los vértices de las distintas aristas de C no pueden ser vecinos entre sí.

    La capacidad de la red dada por G es el número máximode conversaciones simultáneas que pueden tener lugar en una misma frecuencia (el tamaño del mayor conjunto posible C). Dado el siguiente problema de decisión, demuestre que es NP-completo:

    > Dado un grafo G y un entero k, ¿existe un conjunto C de conversaciones con $|C| \geq k$?

    [Moore & Mertens: "The Nature of Computation", problem 5.7, pp. 164]

20. **Spin glass** (`http://en.wikipedia.org/wiki/Spin_glass`): Un "vidrio de espín" es un sistema magnético en el que el acoplamiento entre los momentos magnéticos de los distintos átomos es aleatorio (algo así como un imán desordenado). Formalmente, puede verse como un grafo en el que el vértice i-ésimo tiene un espín $s_i = \pm 1$ que

representa si el campo magnético del átomo i-ésimo apunta hacia arriba o hacia abajo. Cada arista (i, j) del grafo tiene asociada una fuerza de interacción J_{ij} que indica hasta qué punto interactúan s_i y s_j. Además, cada vértice i está sometido a un campo externo h_i. Dada una configuración del sistema (un conjunto de valores para los s_i), su energía es

$$E(\{s_i\}) = -\sum_{ij} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i s_i$$

La arista (i, j) es ferromagnética si $J_{ij} > 0$ y antiferromagnética si si $J_{ij} < 0$; esto es, el ferromagnetismo tiende a alinear los espines. El campo externo es positivo o negativo en función de si queremos que s_i sea $+1$ o -1, respectivamente.

Ya vimos que, en el caso ferromagnético, el problema está en P. Sin embargo, en cuanto algunas aristas son antiferromagéticas, el tema se complica, incluso en ausencia de un campo magnético externo. Demuestre que la siguiente versión del problema es NP-completa:

> Dado un grafo G con interacciones J_{ij} y un nivel de energia E, ¿existe un estado $\{s_i\}$ tal que $-\sum_{ij} J_{ij} s_i s_j \leq E$?

Pista: Muestre que el problema es NP-completo en ausencia de un campo externo cuando todas las aristas son antiferromagnéticas con $J_ij = -1$. Observe que, en este caso, buscaremos un corte maximo (MAX CUT)...

[Moore & Mertens: "The Nature of Computation", problem 5.30, pp. 167-168]

21. La autoridad portuaria del Puerto de Motril está preocupada porque sus ingresos se ven limitados por la velocidad a la que se pueden descargar los contenedores de los barcos que llegan al puerto. El manejo de sustancias peligrosas le añade complejidad adicional al problema, que ya les resulta complicado de por sí. Como consultor, le piden que analice el siguiente problema:

    Supongamos que llega un convoy de barcos por la mañana con un total de n contenedores, cada uno de los cuales contiene distintas sustancias (algunas de ellas peligrosas). En el muelle, hay m camiones disponibles, cada uno de los cuales puede transportar hasta k contenedores. Cualquier contenedor se puede transportar en cualquier camión, pero existen ciertos pares de sustancias químicas que no pueden cargarse en el mismo camión (podrían provocar una explosión si entrasen en contacto). ¿Existe alguna forma de cargar los n contenedores en los m camiones de forma que ningún camión esté sobrecargado y no se carguen en el mismo camión sustancias que no deban transportarse juntas? Demuestre que se trata de un problema NP-completo.

NOTA: Si cambiamos la formulación del problema, de forma que, para cada sustancia química dispongamos de un subconjunto de camiones en los que es seguro transportarla, encontrar la forma de cargar los n contenedores en los m camiones sin sobrecargar ningún camión de forma que cada contenedor vaya en un camión preparado para transportarlo está en P. ¿Cuál sería el algoritmo que nos permitiría resolver este problema en tiempo polinómico?

Kleinberg & Tardos: "Algorithm Design", problem 8.19, pp. 514-515.

Algunos problemas NP-completos relevantes

- SAT: Problema de la satisfacibilidad booleana.
  Nota: 2-SAT está en P, 3-SAT es NP-completo y κ-SAT $\leq$ 3-SAT.

  Stephen A. Cook (1971): "The Complexity of Theorem-Proving Procedures". Proceedings of the 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 151-158. DOI 10.1145/800157.805047.

  Leonid Levin (1973): "Universal search problems" (in Russian) Problems of Information Transmission 9(3):115-116.
  http://www.mathnet.ru/links/798810596c4f6b7e5d44ab594b972417/ppi914.pdf

- LOS 21 PROBLEMAS DE KARP: Karp utilizó el teorema de Cook de 1971 para demostrar que los siguientes problemas son NP-completos:

  1. SATISFIABILITY
  2. 0–1 INTEGER PROGRAMMING
  3. CLIQUE
  4. SET PACKING
  5. VERTEX COVER
  6. SET COVERING
  7. FEEDBACK NODE SET
  8. FEEDBACK ARC SET
  9. DIRECTED HAMILTONIAN CYCLE
  10. UNDIRECTED HAMILTONIAN CYCLE
  11. SATISFIABILITY WITH AT MOST 3 LITERALS PER CLAUSE (= 3-SAT)
  12. GRAPH COLORING
  13. CLIQUE COVER
  14. EXACT COVER
  15. HITTING SET
  16. STEINER TREE
  17. 3-DIMENSIONAL MATCHING
  18. "KNAPSACK" (usando una definición más similar a SUBSET SUM que al problema de la mochila)
  19. JOB SEQUENCING
  20. PARTITION
  21. MAX CUT

Richard M. Karp (1972): "Reducibility Among Combinatorial Problems".
In R. E. Miller and J. W. Thatcher (editors): "Complexity of Computer Computations".
New York: Plenum. pp. 85-103.
http://cgi.di.uoa.gr/~sgk/teaching/grad/handouts/karp.pdf

Se han identificado, literalmente, miles de problemas NP-completos. En Wikipedia puede encontrar una lista con algunos de ellos:

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_NP-complete_problems