DECSAI
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada

Ejercicios de Algorítmica

Fernando Berzal, berzal@acm.org

29 de febrero de 2024

Tiempo de ejecución

Problema

Usando la notación $O(\cdot)$, obtenga el tiempo de ejecución de la siguiente función:

```
1:  long ejemplo2 (int n)
2:  {
3:    int  i, j, k;
4:    long total = 0;
5:
6:    for (i = 1; i < n; i++)
7:        for (j = i+1; j <= n; j++)
8:            for (k = 1; k <= j; k++)
9:                total += k*i;
10:
11:   return total;
12: }
```

Comenzando por el cuerpo del bucle más interno (línea #9), tenemos dos operaciones aritméticas (un producto y una suma) seguidas de una asignación, todas ellas operaciones elementales que se ejecutan en tiempo constante, i.e. $O(1)$.

- El bucle interno (`k`) se ejecuta un total de j iteraciones. Por tanto, el coste asociado a la ejecución del bucle interno es $O(j)$, j iteraciones O(1).
- El bucle intermedio (`j`) se ejecuta de `j=i+1` a `j=n`, un total de $n-i$ iteraciones. Ahora bien,

no todas las iteraciones tienen el mismo coste, por lo que no podemos multiplicar el número de iteraciones por el coste de cada iteración, sino que tenemos que ir sumando el coste de cada iteración:

$$\sum_{j=i+1}^{n} j$$

- El bucle externo (`i`) se ejecuta de `i=1` a `i=n-1`, un total de $n-1$ iteraciones, cada una de las cuales tiene el coste obtenido anteriormente para el bucle intermedio:

$$t(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} j$$

Para obtener una expresión de $t(n)$ en términos de n podemos utilizar diferentes estrategias, p.ej.

$$\sum_{j=i+1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n-i} (i+j)$$

por lo que la expresión anterior queda como sigue:

$$\begin{aligned} t(n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} j \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} (i+j) \end{aligned}$$

Centrémosnos en calcular la sumatoria interna:

$$\sum_{j=1}^{n-i} (i+j) = \sum_{j=1}^{n-i} i + \sum_{j=1}^{n-i} j$$

Ahora bien:

$$\sum_{j=1}^{n-i} i = (n-i)i$$

$$\sum_{j=1}^{n-i} j = \frac{1}{2}(n-i)(n-i+1)$$

El primer término es $n-i$ veces una constante (independiente del índice) y el segundo término es la suma de los $n-i$ primeros términos de una sucesión aritmética.

Por tanto, la sumatoria interna queda como sigue:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i+1}^{n} j &= \sum_{j=1}^{n-i} (i+j) \\
&= \sum_{j=1}^{n-i} i + \sum_{j=1}^{n-i} j \\
&= (n-i)i + \frac{1}{2}(n-i)(n-i+1) \\
&= \frac{1}{2}\left(2(n-i)i + (n-i)(n-i+1)\right) \\
&= \frac{1}{2}(n-i)(2i+n-i+1) \\
&= \frac{1}{2}(n-i)(n+i+1) \\
&= \frac{1}{2}(n^2+n-i^2-i)
\end{aligned}$$

Por último, hemos de incluir ese valor en el interior de la sumatoria correspondiente al bucle externo:

$$\begin{aligned}
t(n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} j \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}(n^2+n-i^2-i) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n-1} n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i\right]
\end{aligned}$$

Los dos primeros términos son independientes de i, por lo que tenemos

$$\sum_{i=1}^{n-1} n^2 = (n-1)n^2 = n^3 - n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} n = (n-1)n = n^2 - n$$

Los dos últimos términos podemos calcularlos como la suma de los $n-1$ primeros términos de dos sucesiones:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{2}(n-1)(n-1+1) = \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

Si sumamos estos dos términos obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 &= n(n-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(2n-1)\right] \\
&= n(n-1)\left[\frac{3+2n-1}{6}\right] \\
&= n(n-1)\left[\frac{2n+2}{6}\right] \\
&= n(n-1)\left[\frac{n+1}{3}\right] \\
&= \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) \\
&= \frac{1}{3}n(n^2-1) \\
&= \frac{1}{3}(n^3-n)
\end{aligned}$$

Ya sólo nos queda restarle ese valor a la suma de los dos primeros términos de $t(n)$:

$$\begin{aligned}
t(n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} j \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n-1} n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(n^3-n) - \frac{1}{3}(n^3-n)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(n^3-n)\right] \\
&= \frac{1}{3}(n^3-n) = \frac{n^3-n}{3} \in O(n^3)
\end{aligned}$$

Por inducción Podemos inferir el resultado anterior analizando el número de operaciones que se realizan para un valor de n concreto.

Por ejemplo, para $n = 4$, el bucle externo se ejecuta 3 veces, para $i \in \{1, 2, 3\}$:

- Para `i=3`, el cuerpo del bucle `j` se ejecuta una única vez (`j=4`), que involucra 4 iteraciones del bucle interno: $t_3 = 4$.

- Para `i=2`, el cuerpo del bucle `j` se ejecuta dos veces (`j=3` y `j=4`), que involucra $3 + 4$ iteraciones del bucle interno: $t_2 = 3 + 4$.

- Para `i=1`, el cuerpo del bucle `j` se ejecuta tres veces (`j=2`, `j=3` y `j=4`), que involucra $2 + 3 + 4$ iteraciones del bucle interno: $t_1 = 2 + 3 + 4$.

Si nos fijamos, el número de operaciones necesario es:

$$\begin{aligned} 2 + 3 + 4 + \\ 3 + 4 + \\ 4 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{aligned}$$

Generalizando para un n arbitrario tendríamos:

$$\begin{aligned} t(n) &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-1) \cdot n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i \end{aligned}$$

Algo que ya calculamos antes:

$$t(n) = \frac{n^3 - n}{3} \in O(n^3)$$

Apéndice: Sumas de series

Suma de los n primeros números Como en cualquier sucesión aritmética, denotamos S_n a la suma de sus n primeros términos. Ahora, escribimos esa suma en los dos sentidos:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 &&+ 2 &&+ 3 &&+ ... &&+ (n-2) &&+ (n-1) &&+ n \\ S_n &= n &&+ (n-1) &&+ (n-2) &&+ ... &&+ 3 &&+ 2 &&+ 1 \end{aligned}$$

Si sumamos ambas ecuaciones, obtenemos n veces $n + 1$ en la parte derecha:

$$2S_n = n(n+1)$$

Por tanto,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

Suma de los n primeros cuadrados

$$S = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Supongamos que queremos obtener una demostración para el valor de S.
Podemos partir de la siguiente identidad:

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

Sustituyendo para varios valores de n, tenemos:

$$\begin{aligned}
1^3 - 0^3 &= 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \\
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 \\
4^3 - 3^3 &= 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 \\
&... \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1
\end{aligned}$$

Si sumamos todas esas ecuaciones, tenemos

$$\begin{aligned}
n^3 - 0^3 &= 3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - 3(1 + 2 + ... + n) + n \\
n^3 &= 3S - 3\frac{1}{2}n(n+1) + n
\end{aligned}$$

De ahí podemos despejar $3S$:

$$\begin{aligned}
3S &= n^3 + \frac{3}{2}n(n+1) - n \\
&= n(n^2 - 1) + \frac{3}{2}n(n+1) \\
&= n(n+1)(n-1) + \frac{3}{2}n(n+1) \\
&= n(n+1)\left[n - 1 + \frac{3}{2}\right] \\
&= n(n+1)\left[\frac{2n - 2 + 3}{2}\right] \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Y obtenemos el resultado que queríamos demostrar:

$$S = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$